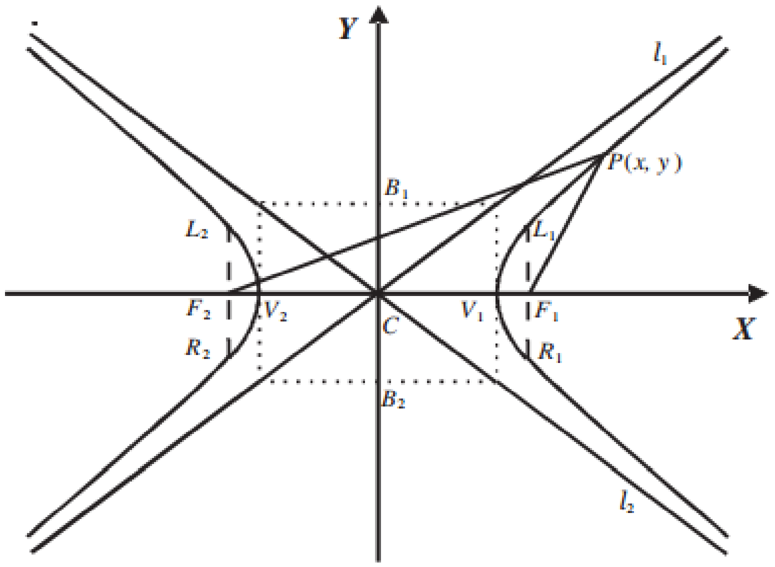
Condiciones que debe de seguir la hipérbola.

Definición

Es el lugar geométrico que describe un punto del plano que se mueve de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos, es siempre constante.

$$\left| \overline{PF_1} - \overline{PF_2} \right| = 2a$$

Gráfica



Elementos

C: Centro

V_1 y V_2: Vértices

F_1 y F_2: Focos

B_1 y B_2: Extremos del eje conjugado

$\overline{V_1V_2} = 2a$ (eje transverso o real)

$\overline{F_1F_2} = 2c$ (eje focal)

$\overline{B_1B_2} = 2b$ (eje conjugado o imaginario)

Condición: $c^2 = a^2 + b^2$; $c > b$, $c > a$

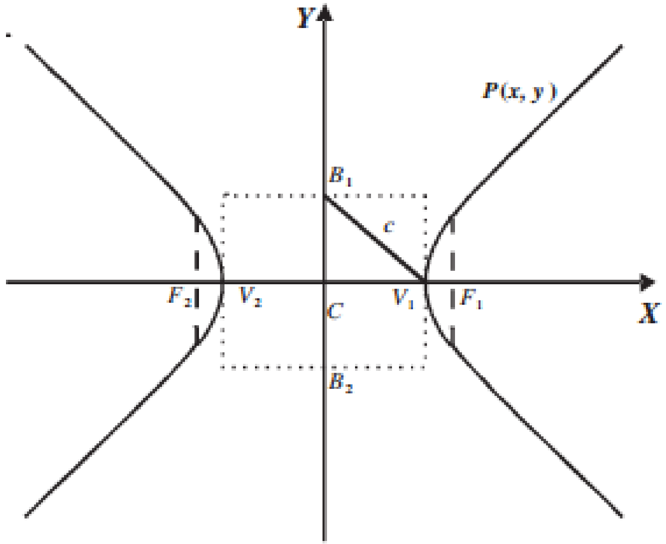
Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}$ $(e > 1)$

$\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a}$ (lado recto)

l_1 y l_2: Asíntotas

ECUACION CON CENTRO EN EL ORIGEN

Ecuación de una hipérbola con centro en el origen



En la figura:

$\overline{CV_1} = \overline{CV_2} = a$

$\overline{CB_1} = \overline{CB_2} = b$

$\overline{CF_1} = \overline{CF_2} = c$

$\overline{CV_1} = \overline{CV_2} = a$, entonces, $\overline{V_1V_2} = 2a$ al ser V_1 un punto de la hipérbola se tiene que: $\overline{V_1F_2} - \overline{V_1F_1} = 2a$, por tanto, la diferencia de las distancias de cualquier punto de la hipérbola a los dos puntos fijos (focos) es igual a $2a$.

La distancia de $B_1(0, b)$ a $V_1(a, 0)$ es: $\overline{B_1V_1} = \sqrt{(a-0)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = c$, de donde $b^2 = c^2 - a^2$, sea $P(x, y)$ un punto de la hipérbola, al hallar la distancia de P a los puntos fijos $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ y al aplicar la definición $\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a$, se obtiene:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Se despeja una radical: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

CENTRO DE EDUCACIÓN MEDIA

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

Se despeja el radical y se divide entre $4a$:

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \rightarrow \frac{cx}{a} - a = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Se eleva al cuadrado y se simplifica:

$$\left(\frac{cx}{a} - a\right)^2 = \left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \rightarrow \frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$\dfrac{c^2x^2}{a^2} - x^2 - y^2 + a^2 - c^2 = 0 \rightarrow \dfrac{c^2-a^2}{a^2}x^2 - y^2 = c^2 - a^2$, se divide entre $c^2 - a^2$:

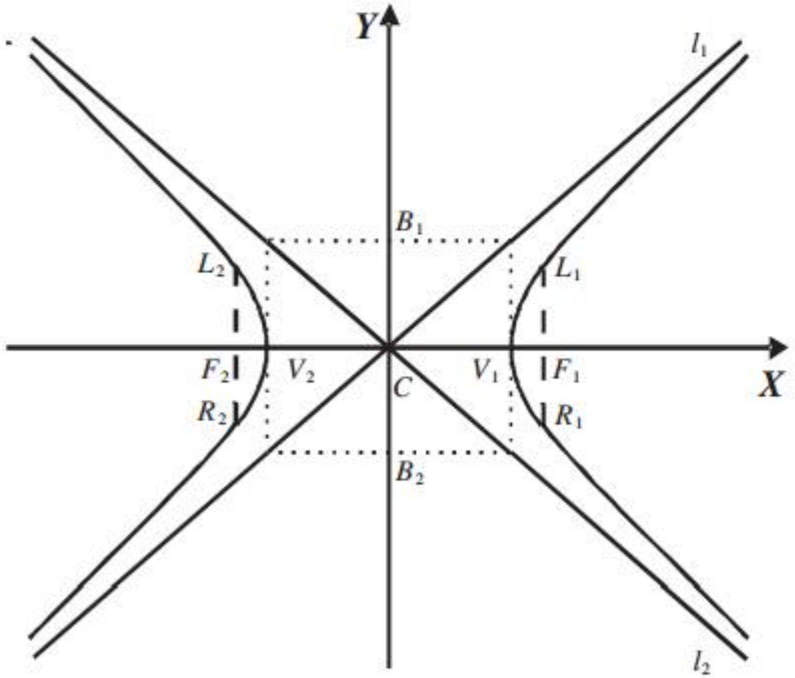
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2-a^2} = 1$, pero $b^2 = c^2 - a^2$, se sustituye y se obtiene: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, la cual es la ecuación de una hipérbola horizontal con centro en el origen.

De forma análoga para una hipérbola vertical, resulta la ecuación: $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

Elementos y ecuación

Elementos y ecuación

Hipérbola horizontal



Ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Elementos

Vértices: $V(\pm a, 0)$

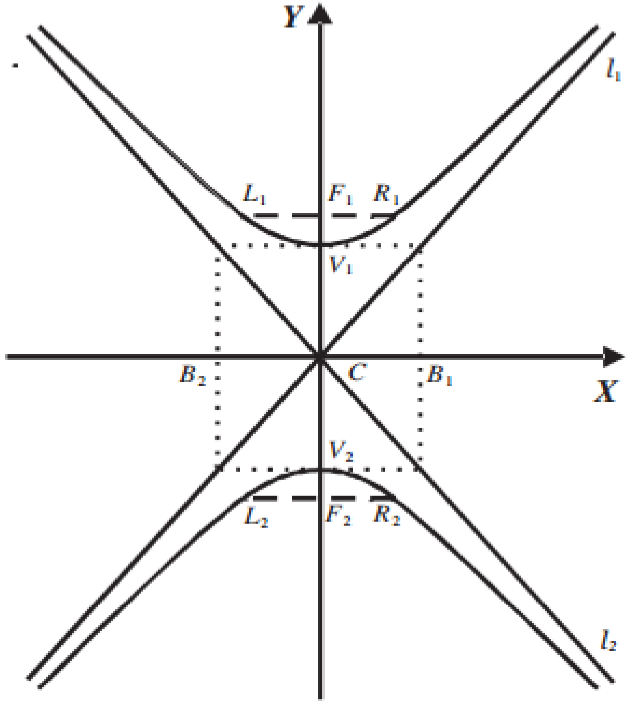
Focos: $F(\pm c, 0)$

Extremos del eje conjugado: $B(0, \pm b)$

Ecuaciones de las asíntotas:

$$l_1: y = \frac{b}{a}x \qquad l_2: y = -\frac{b}{a}x$$

Hipérbola vertical



Ecuación canónica

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

Elementos

Vértices: $V\,(0, \pm a)$

Focos: $F\,(0, \pm c)$

Extremos del eje conjugado: $B\,(\pm b, 0)$

Ecuaciones de las asíntotas

$$l_1\!: y = \frac{a}{b}x \qquad l_2\!: y = -\frac{a}{b}x$$

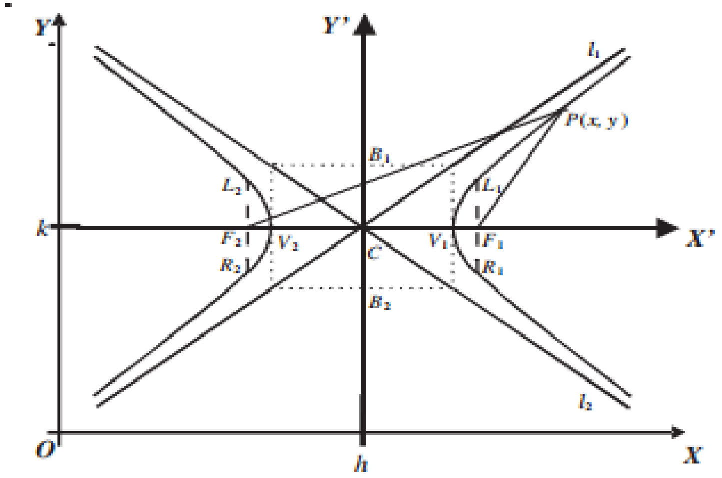
Para hipérbolas horizontales y verticales se tiene que:

Condición: $c^2 = a^2 + b^2$; $c > b$, $c > a$, excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}$ $(e > 1)$, lado recto: $\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a}$

Eje transverso: $2a$, eje conjugado: $2b$, eje focal: $2c$.

Ecuación con centro en el punto (h, k)

Ecuación de una hipérbola con centro en el punto (h, k)



Para una hipérbola horizontal con centro fuera del origen en el punto (h, k), se hace una traslación de los ejes XY al punto C(h, k).

Sean $x' = x - h$, $y' = y - k$, la ecuación de la hipérbola en el nuevo sistema de coordenadas es:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Al sustituir x', y' en la ecuación se obtiene:

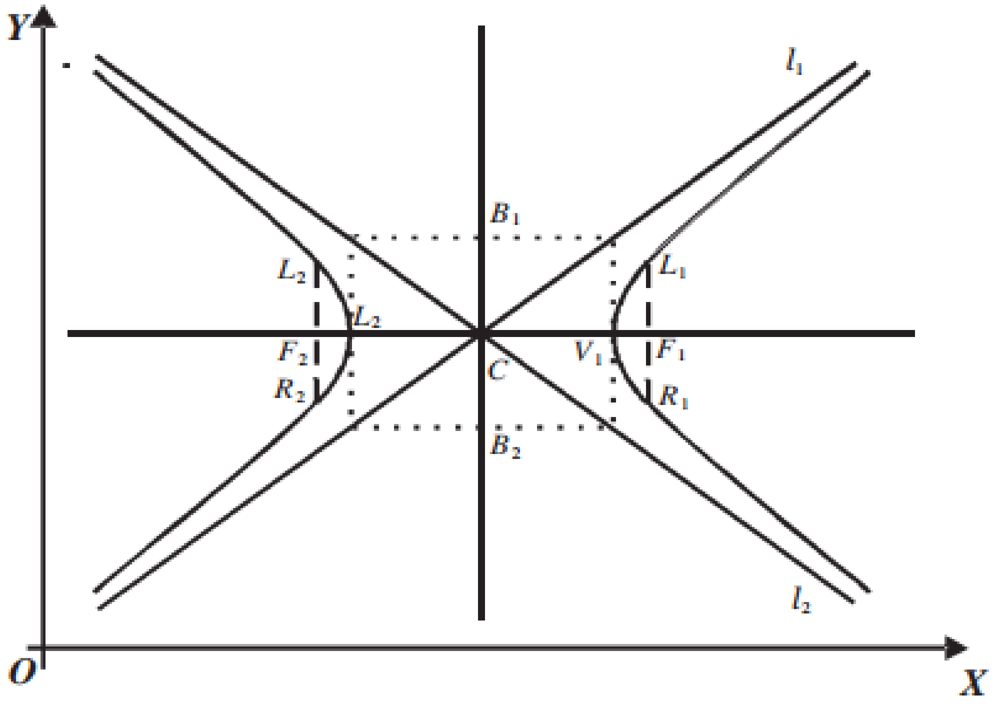
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Del mismo modo se obtiene la ecuación de una hipérbola vertical con centro (h, k) fuera del origen:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Al simplificar se obtendrá una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde A y C varían en signo.

Hipérbola horizontal



Ecuación ordinaria

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Elementos

Vértices: $V\,(h \pm a,\ k)$

Focos: $F\,(h \pm c,\ k)$

Extremos del eje conjugado:

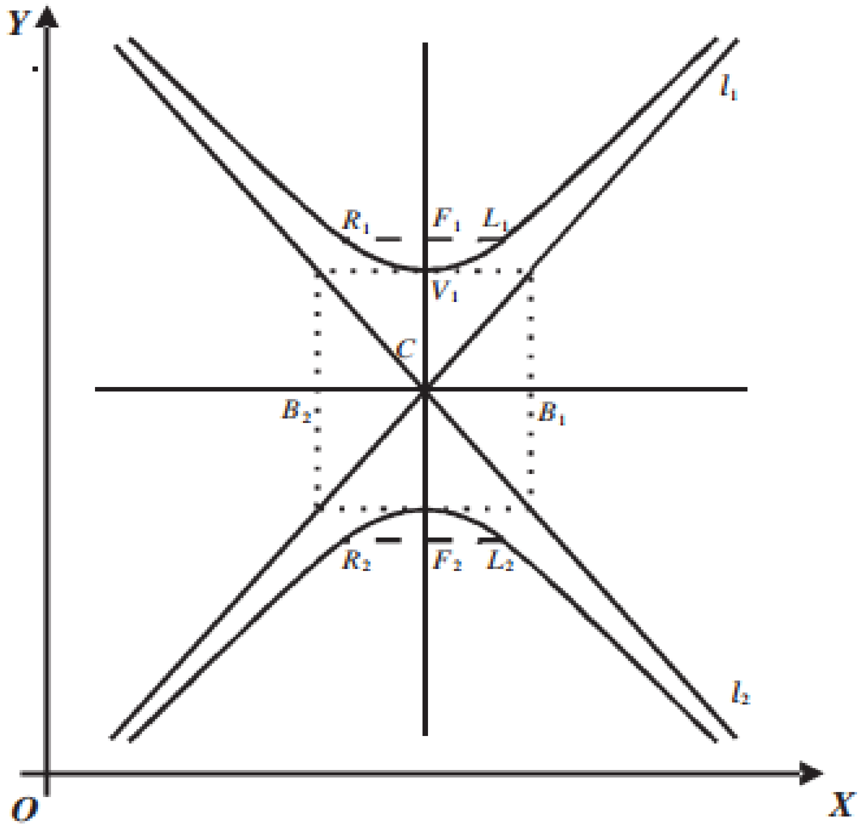
$$B\,(h,\ k \pm b)$$

Ecuaciones de las asíntotas:

$$l_1:\ y-k=\frac{b}{a}(x-h)$$

$$l_2:\ y-k=-\frac{b}{a}(x-h)$$

Hipérbola vertical



Ecuación ordinaria

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Elementos

Vértices: $V\,(h,\,k \pm a)$

Focos: $F\,(h,\,k \pm c)$

Extremos del eje conjugado

$$B\,(h \pm b,\,k)$$

Ecuaciones de las asíntotas

$$l_1\colon y - k = \frac{a}{b}\,(x - h)$$

$$l_2\colon y - k = -\frac{a}{b}\,(x - h)$$

Para hipérbolas horizontales o verticales se tiene que:

Condición: $c^2 = a^2 + b^2$; $c > b$, $c > a$, excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}$ $(e > 1)$, lado recto: $\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a}$

Ecuación general de la hipérbola:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Con A y C de signo contrario.

Casos especiales y ecuación de una recta tangente a una hipérbola en un punto cualquiera

Casos especiales

Existen ecuaciones que no precisamente representan una hipérbola y que sólo son un par de rectas concurrentes.

Ecuación de una recta tangente a una hipérbola en un punto cualquiera

Se tiene una hipérbola con vértice en el origen y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), la ecuación de la recta está dada por:

$$\text{Horizontal: } \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

$$\text{Vertical: } \frac{y_0 y}{a^2} - \frac{x_0 x}{b^2} = 1$$

Se tiene una hipérbola con centro (h, k) fuera del origen y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), la ecuación de la recta está dada por:

$$\text{Horizontal: } \frac{(x_0 - h)(x - h)}{a^2} - \frac{(y_0 - k)(y - k)}{b^2} = 1$$

$$\text{Vertical: } \frac{(y_0 - k)(y - k)}{a^2} - \frac{(x_0 - h)(x - h)}{b^2} = 1$$

Ejemplos

Determina los elementos y traza la gráfica de la hipérbola, cuya ecuación es:

$$9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$$

Solución

Se transforma la ecuación a la forma canónica:

$$9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$$

Se divide entre el término independiente y se simplifica:

$$9x^2 - 4y^2 = 36$$

$$\frac{9x^2}{36} - \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36} \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ Ecuación en su forma canónica.}$$

La ecuación representa una hipérbola horizontal de la forma: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

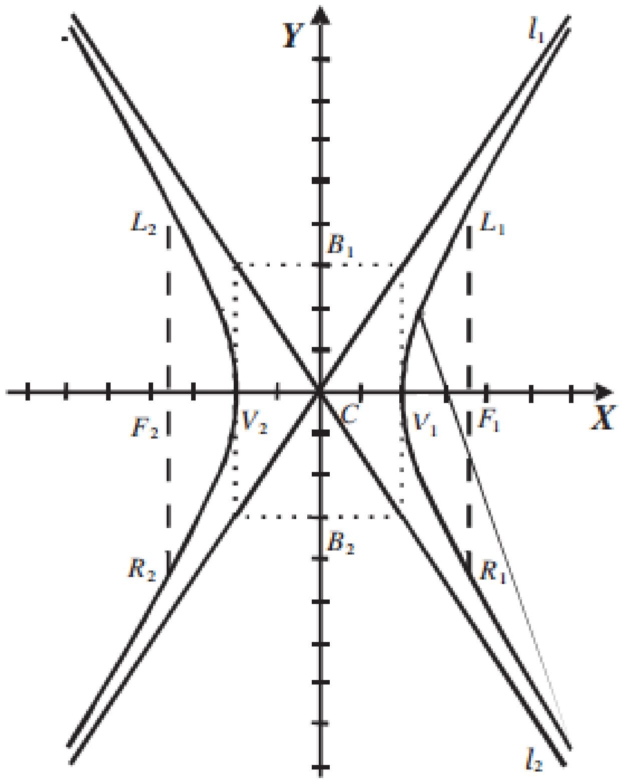
De la cual se obtiene el semieje transverso a y el semieje conjugado b:

$$a^2 = 4 \rightarrow a = 2 \text{ y } b^2 = 9 \rightarrow b = 3$$

Se aplica la condición para encontrar el valor de c (distancia del centro al foco):

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Al sustituir: $a = 2$, $b = 3$ y $c = \sqrt{13}$, se obtiene:



Vértices: $V(\pm a, 0) = V(\pm 2, 0)$

Focos: $F(\pm c, 0) = F\left(\pm\sqrt{13}, 0\right)$

Extremos del eje conjugado:

$$B(0, \pm b) = B(0, \pm 3)$$

Asíntotas:

$$l_1: y = \frac{3}{2}x \rightarrow 3x - 2y = 0$$

$$l_2: y = -\frac{3}{2}x \rightarrow 3x + 2y = 0$$

Lado recto: $\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(3)^2}{2} = \dfrac{18}{2} = 9$

Eje transverso: $\overline{V_1V_2} = 2a = 2(2) = 4$

Eje focal: $\overline{F_1F_2} = 2c = 2\sqrt{13}$

Eje conjugado: $\overline{B_1B_2} = 2b = 2(3) = 6$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

Reduce la ecuación de la hipérbola a su forma ordinaria, determina sus elementos y grafica la curva.

$$5x^2 - 4y^2 - 10x + 24y - 51 = 0$$

Solución

$$5x^2 - 4y^2 - 10x + 24y - 51 = 0$$

$$5(x^2 - 2x) - 4(y^2 - 6y) = 51$$

$$5(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 - 6y + 9) = 51 + 5 - 36$$

$$5(x - 1)^2 - 4(y - 3)^2 = 20$$

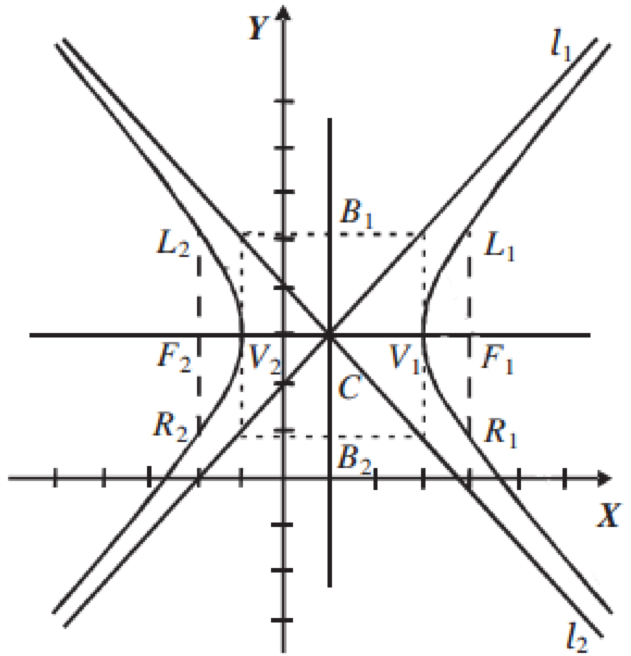
$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1 \text{ Ecuación en su forma ordinaria.}$$

El centro, el semieje transverso y el semieje conjugado son:

$$C\,(1,\,3);\ a = \sqrt{4} = 2 \text{ y } b = \sqrt{5}$$

El valor de c es: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$.

Se obtienen los elementos sustituyendo los valores anteriores y posteriormente se grafica:



Vértices: $V\,(h \pm a,\ k)$

$V_1\,(3,\ 3)\ V_2\,(-1,\ 3)$

Focos: $F\,(h \pm c,\ k)$

$F_1\,(4,\ 3)\ F_2\,(-2,\ 3)$

Extremos del eje conjugado: $B\,(h,\ k \pm b)$

$B_1\,(1,\ 5.2)\ B_2\,(1,\ 0.8)$

Lado recto: $\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(5)}{2} = 5$

Eje transverso: $\overline{V_1V_2} = 2a = 4$

Eje focal: $\overline{F_1F_2} = 2c = 6$

Eje conjugado: $\overline{B_1B_2} = 2b = 2\sqrt{5}$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{2}$

Asíntotas

$$l_1\!: y - 3 = \frac{\sqrt{5}}{2}(x-1) \rightarrow \sqrt{5}x - 2y + \left(6 - \sqrt{5}\right) = 0$$

$$l_2\!: y - 3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}(x-1) \rightarrow \sqrt{5}x + 2y - \left(6 + \sqrt{5}\right) = 0$$

Referencias bibliográficas

- http://www.matematin.com/archivos/libros/Matematicas_simplificadas_2da_Edicion.pdf